После реализации данных алгоритмов использование БПФ по заданным формулам обладает необходимой вычислительной сложностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152)

Литература

1. Лукомский С.Ф, Водолазов А.М. *Быстрое дискретное преобразование Фурье на локальных полях положительной характеристики* // Проблемы передачи информации. – 2017. – Т. 53. – Вып. 2. – С. 60–69.

IMPLEMENTATION OF FAST FOURIER TRANSFORM ON LOCAL FIELDS

A.A. Baryshev, G.A. Bondarenko, D.S. Lukomskii

The implementation of numerical algorithm of fast Fourier transform on local fields of positive characteristic is discussed in the paper. Image compression is presented as an example of application of the algorithm.

Keywords: discrete Fourier transform, local fields, numerical algorithm, image compression.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О МНОЖЕСТВЕ ST(M$_4$) В ПРЕДУАЛЬНОМ К L_1 ПРОСТРАНСТВЕ

Б.Б. Беднов[1]

1 *noriiii@inbox.ru*; МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Исследуется множество точек Штейнера четырёх элементов предуального к L_1 пространства.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Линденштраусса, точка Штейнера, липшицева выборка.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M_n)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\mathrm{st}|(M_n).$$

Пространство X называется предуальным к L_1 или пространством Линденштраусса, если X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n (здесь l_∞^n обозначает n-мерное пространство с нормой $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$). Пространства Линденштраусса хорошо изучены (см. [1], [2], а также [3]).

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M_n)$ не пусто [4] для произвольного множества $M_n \subset X$, а само множество $\mathrm{st}(M_n)$ можно охарактеризовать [5] при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a

и b в банаховом пространстве X есть множество $m[a,b] = \{x \in X : \|x-a\| + \|x-b\| = \|a-b\|\}$).

Для трёх точек в предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера полностью характеризуется следующей теоремой.

Теорема A [6], [5]. *Пусть пространство X предуально к L_1, $x_1, x_2, x_3 \in X$. Тогда множество* $\mathrm{st}(x_1,x_2,x_3) = m[x_1,x_2] \cap m[x_2,x_3] \cap m[x_3,x_1] = \cap_{i=1}^{3} S(x_i,r_i)$, *где* $r_i = \frac{1}{2}(\|x_j - x_i\| + \|x_k - x_i\| - \|x_k - x_j\|)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Множества $\mathrm{st}(x_i,x_j,x_k)$, $\{i,j,k\} \subset \{1,2,3,4\}$, и $\mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ связаны между собой. Покажем некоторые закономерности.

Теорема 1. *Пусть X предуально к L_1, $x_1,x_2,x_3,x_4 \in X$. Существует точка $s \in$* $\mathrm{st}(x_1,x_2,x_3) \cap \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Следствие 1. *Пусть X предуально к L_1, $x_1,x_2,x_3 \in X$. Для произвольной точки $x_4 \in X$ найдётся такая точка $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3)$, что $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.*

Приведём пример построения точек Штейнера четырёхэлементного множества.

Теорема 2. *Пусть X предуально к L_1, $\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \subset X$, $z \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $s \in \mathrm{st}(x_i,x_j,z)$. Тогда $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.*

Далее введём следующие обозначения. Пусть $r_i^{jk} = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|)$. Это расстояние от точки x_i до (любой) точки $s \in \mathrm{st}(x_i,x_j,x_k)$, что следует из теоремы A. Пусть $\rho_i = \min\{r_i^{jk} \mid \{j,k\} \subset \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}\}$, $M_4 = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

Теорема 3. *Пусть X предуально к L_1, $M_4 \subset X$. Наименьшее значение $\|x_1 - s\|$ равно ρ_1 при $s \in \mathrm{st}(M_4)$.*

Следствие 2. *Пусть X предуально к L_1, $M_4 \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$. Наибольшее расстояние от точки x_4 до множества $\mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ достигается для точки $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3) \cap \mathrm{st}(M_4)$.*

Теорема 4. *Пусть X предуально к L_1, $M_4 \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$. Тогда*

$$\mathrm{st}(M_4) = \cup_{R_1 \in I_1} \cup_{R_2 \in I_2} \cap_{i=1}^{4} S(x_i,R_i),$$

где $R_3 = \|x_2 - x_3\| - R_2$, $R_4 = \|x_1 - x_4\| - R_1$, $I_1 = [\rho_1, \|x_1 - x_4\| - \rho_4]$, $I_2 = I_2(R_1) = [A,B]$ *при*

$$A = \max\{\|x_1 - x_2\| - R_1, \|x_4 - x_2\| - \|x_4 - x_1\| + R_1\},$$

$$B = \min\{\|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_3\| + R_1, \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + \|x_4 - x_1\| - R_1\}.$$

В связи с многозначностью отображения $\mathrm{St_n} : (x_1,\dots,x_n) \to \mathrm{st}(x_1,\dots,x_n)$ естественно возникает вопрос о существовании хорошей выборки. Липшицева выборка из St_3 в пространстве $C[K]$ действительнозначных непрерывных на компакте K функций построена в [6]. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема B [6]. *Пусть $x_1,x_2,x_3 \in C[K]$. Отображение* $V(x_1,x_2,x_3)(t) = \min\{x_1(t) + r_1, x_2(t) + r_2, x_3(t) + r_3\}$ *является липшицевой выборкой из отображения* St_3 (*здесь* $r_i = r_i(x_1,x_2,x_3)$ *— числа из теоремы A*).

Из отображения St_4 в пространстве $C[K]$ также существует липшицева выборка.

Теорема 5. *Пусть* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C[K]$. *Отображение* $V(x_1, x_2, x_3, x_4)(t) = \min_{i=1}^{4}\{x_i(t) + r_i\}$ *является липшицевой выборкой из отображения* St_4 *при* $r_1 = \rho_1 = \rho_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $r_i = \|x_i - x_1\| - r_1$, $i = 2, 3, 4$.

Работа поддержана РФФИ (проект № 15-01-08335).

Литература

1. Grothendieck A. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces* L^1 // Canad. J. Math. – 1955. – V. 7. – № 4. – P. 552–561.

2. Lindenstrauss J. *Extension of compact operators* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 48. – P. 1–112.

3. Lima Å. *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 227. – P. 1–62.

4. Беднов Б. Б., Бородин П. А. *Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205. – № 4. – С. 3–19.

5. Беднов Б. Б. *Длина минимального заполнения типа звезды* // Матем. сб. – 2016. – Т. 207. – № 8. – С. 31–46.

6. Беднов Б. Б. *О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций* // Вестн. Моск. ун-та, Матем. Механ. – 2011. – № 6. – С. 26–31.

ON THE SET ST(M$_4$) IN THE SPACE PREDUAL TO L_1

B.B. Bednov

We investigate the set of Steiner points of four element sets in the space predual to L_1.

Keywords: Banach space, Lindenstrauss space, Steiner point, Lipschits selection.

УДК 517.986.62

ВЕЙВЛЕТЫ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Г.С. Бердников[1]

1 *evrointelligent@gmail.com*; Саратовский Государственный Униврситет

В статье обсуждается использование графов для построения вейвлетов на группах Виленкина. Работа является логическим продолжением работ с участием автора по нахождению непереборного алгоритма построения масштабирующей функции, порождающей ортогональный кратномасштабный анализ на группах Виленкина.

Ключевые слова: вейвлеты, группы Виленкина, кратномасштабный анализ, графы, масштабирующая функция, алгоритм.

Пусть $(G_n, \dot{+})$ – локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\ldots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots),\ x_j = \overline{0, p-1},$$